Cap. 3 - CONICHE

Dal punto di vista classico, le coniche sono introdotte come “luoghi geometrici”. Una definizione di luogo geometrico, per altro, sui libri non è mai data in modo chiaro: quasi sempre è sinonimo di “sottoinsieme del piano euclideo”. Potremmo limitare questa inutile generalità chiedendo che i punti del luogo soddisfino un’identità legata alla distanza da oggetti prefissati, ossia da punti, rette, coniche, ecc. Oppure, dire che un luogo geometrico è, sic et simpliciter, una curva algebrica.

Consideriamo qui il caso delle coniche a coefficienti nel campo reale, anche se, per confronto, penseremo spesso di immergere tale conica nel campo complesso.
L’equazione generale di una conica è

$$a_{11}\cdot x_1^2 + 2a_{12}\cdot x_1\cdot x_2 + a_{22}\cdot x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}\cdot x_2 + a_{33} = 0$$

con i coefficienti di secondo grado non tutti nulli.

Sia $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$ la matrice simmetrica dei coefficienti. Rappresentiamo un punto generico del piano mediante la matrice-colonna $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ e un punto particolare mediante $P = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Allora l’equazione della conica si può scrivere nella forma matriciale $X^t \times A \times X = 0$, mentre l’appartenenza di P alla conica diventa $P^t \times A \times P = 0$.

NOTA. Quando ci sarà più comodo, scriveremo i punti come matrici-riga $X = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}$.

Coniche non degeneri. Se uguagliamo a zero il prodotto di due polinomi di primo grado (ax+by+c)(a’x+b’y+c’)=0, otteniamo una *conica degenere*, che si spezza in due rette, e la cui matrice A è *singolare*, ossia ha determinante nullo. Dopo questa verifica, chiameremo *non degenere* una conica che non si compone di rette, e ciò equivale a $\Delta = \det(A) \neq 0$.

Sia $A_{33} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ e siano λ_1, λ_2 i suoi autovalori, che sono reali. Sia poi δ il suo determinante, per cui si ha $\delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2$. Abbiamo tre casi: un autovalore nullo (quindi $\delta = 0$), due autovalori non nulli e con lo stesso segno (quindi $\delta > 0$), due autovalori non nulli e di segno opposto (quindi $\delta < 0$).

A questi tre casi corrispondono coniche assai diverse per la forma che hanno nel piano: parabola, ellisse (reale o immaginaria) ed iperbole.

Ma ora vediamo alcune proprietà generali delle coniche. La prima discende dal fatto che un sistema di secondo grado in due incognite con un numero finito di soluzioni ne ha al massimo due. Le altre si potrebbero dimostrare con semplici calcoli con le matrici ed i sistemi lineari.

LEMMA 3.1. Se una conica ed una retta hanno in comune tre punti distinti, allora la conica è degenere e contiene la retta.

TEOREMA 3.2. Siano dati nel piano cinque punti distinti A, B, C, D, E.

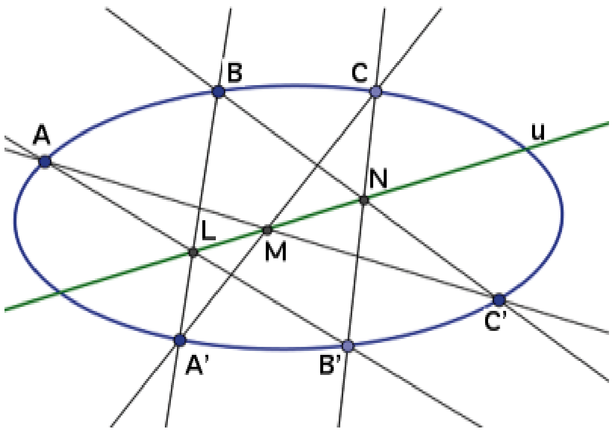
a) Esiste una conica alla quale appartengono.
b) Se al più tre di essi sono allineati, allora la conica è unica.

TEOREMA 3.3. La retta tangente alla conica reale non degenere *C* di equazione $X^t \times A \times X = 0$ in un suo punto P ha equazione $X^t \times A \times P = 0$, dove A è la matrice di *C*.

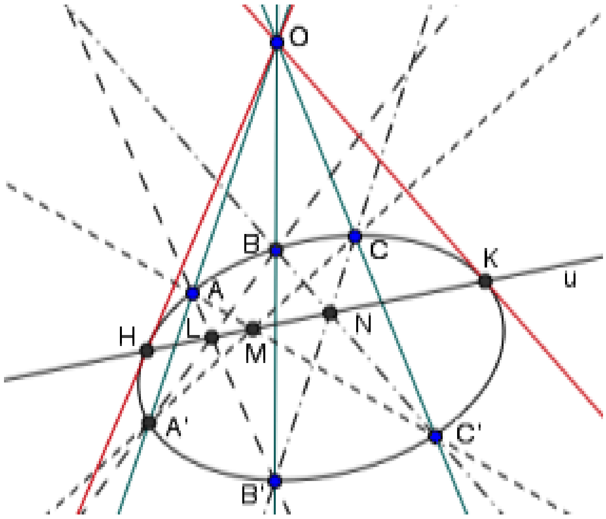
TEOREMA 3.4. (Pappo – Pascal). Sia data una conica reale non degenere (o anche formata da due rette distinte) e siano A, B, C, A', B', C' sei punti distinti su di essa. Siano:

$$L = AB' \cap A'B,\ M = AC' \cap A'C,\ N = BC' \cap B'C.$$

Allora i tre punti L, M, N sono su una stessa retta u.



Sia data una conica non degenere *C* e sia O un punto non su di essa. Si traccino tre rette per O, che intersechino la conica in tre coppie di punti A, A', B, B', C, C'. La retta u determinata dal teorema di Pappo – Pascal si chiama *polare* di O rispetto alla conica.

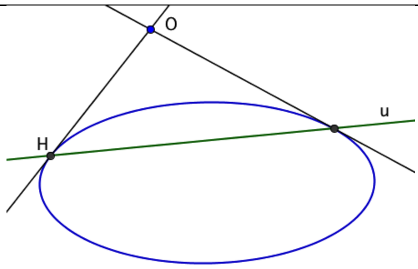


Per completezza, chiamiamo polare di un punto T della conica la *tangente* in T alla conica.

Analiticamente, si dimostra che la polare di un punto P rispetto alla conica non degenere di equazione $X^t \times A \times X = 0$ ha equazione $X^t \times A \times P = 0$.

Questa equazione ha senso anche per una conica immaginaria, come per esempio $x^2 + y^2 + 1 = 0$, quindi la nozione di polare si può dare in ogni caso.

LEMMA 3.5. La polare del punto O rispetto alla conica non degenere *C* intersechi la conica in un punto H. Allora la retta OH è tangente alla conica.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Un punto O è esterno alla conica se la sua polare è una secante; è interno se la polare è esterna; appartiene alla conica se la sua polare è la tangente in O alla conica.</td>
</tr>
</table>

Allora si ha una proprietà detta *reciprocità*: se P e Q sono due punti distinti e se Q appartiene alla polare di P, allora P appartiene alla polare di Q. Infatti, se $Q^t \times A \times P = 0$ allora, essendo A simmetrica, si ha $P^t \times A \times Q = 0$ e quindi P appartiene alla retta $X^t \times A \times Q = 0$. Riassumendo:

TEOREMA 3.6. Sia *C* una conica non degenere.

a) (*Reciprocità della polare*). Sia P un punto e sia Q un punto della polare u di P rispetto a *C*. Allora la polare di Q passa per P.

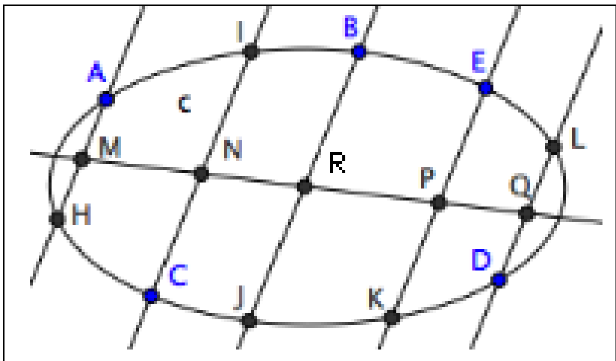
b) Ogni retta è la polare di un punto rispetto alla conica.

c) Il polo di una secante r alla conica *C* è l'intersezione delle tangenti condotte dai punti d'intersezione di r con *C*.

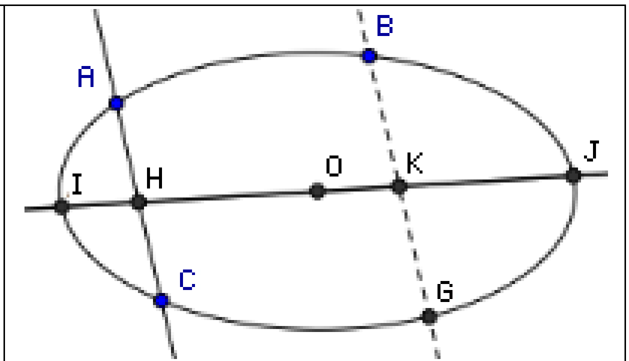
Quanto detto finora vale anche per i *punti impropri* o all'infinito del piano, identificati con i fasci di rette parallele. La *retta impropria* è l'insieme di questi punti impropri. Analiticamente, un punto improprio si può rappresentare con una matrice-colonna $P = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (o con una qualunque matrice-colonna ad essa proporzionale). Ogni punto improprio, individuabile mediante un fascio di parallele, ha la sua polare rispetto alla conica *C*, e la retta impropria ha il suo polo. La retta impropria può essere secante, tangente o esterna alla conica *C*.

Si chiama *parabola* una conica tangente alla retta impropria; *iperbole* una conica secante la retta impropria; *ellisse* una conica che non ha punti impropri.

TEOREMA 3.7. La polare di un punto improprio T, da cui esce un fascio di rette parallele, rispetto ad una conica *C* non passante per T, è il luogo dei punti medi delle corde in cui la conica taglia ogni retta del fascio.



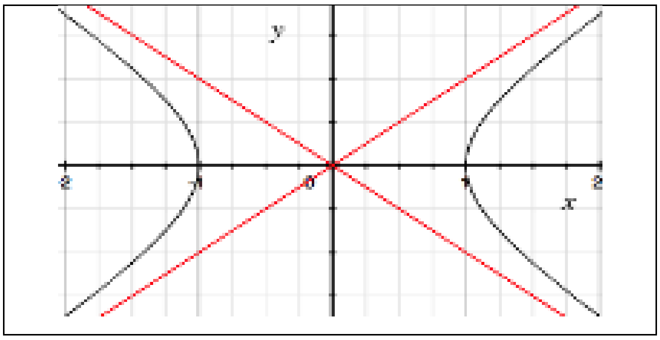
Un diametro



Il centro O

La polare di un punto improprio prende il nome di *diametro* della conica. Il polo della retta impropria si chiama *centro* della conica.

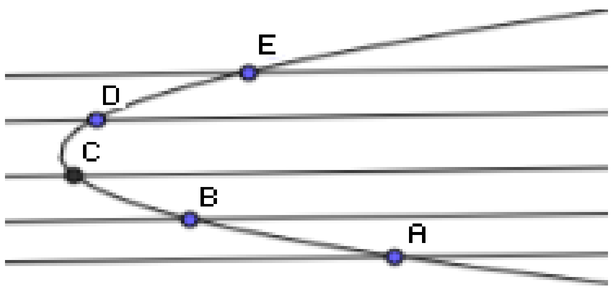
Per la reciprocità, tutti i diametri passano per il centro.



Se la conica è un'iperbole, le rette che congiungono il centro O con i due punti impropri (che sono le intersezioni della sua polare con la conica) sono le tangenti all'iperbole condotte da O, e prendono il nome di *asintoti*.

Anche l'*ellisse immaginaria* ha il centro in un punto proprio. Ellisse, ellisse immaginaria ed iperbole sono dette *coniche a centro*.

Se la conica è una parabola, è tangente alla retta impropria, quindi il suo centro è il punto di tangenza, ossia è il punto improprio della parabola. Ne segue che tutti i diametri sono paralleli tra loro.

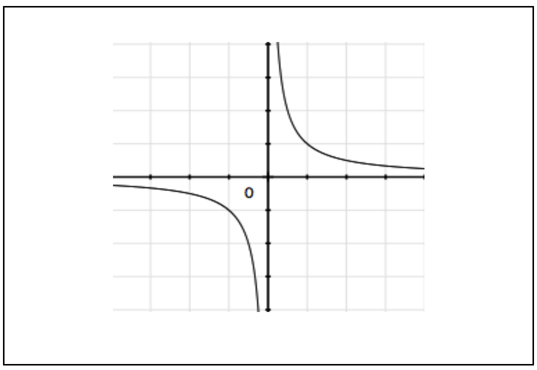


NOTA. Tutte le iperboli sono *affini* tra loro, tutte le parabole lo sono e così pure le ellissi e le ellissi immaginarie. Questo teorema conferma quanto affermato in precedenza: ci sono in tutto 11 classi di affinità di coniche affini, comprese quelle degeneri.

Esempio 3.8. Classifichiamo la conica affine $x \cdot y - 1 = 0$. Moltiplichiamo per 2 i coefficienti, per comodità.

La matrice della conica è allora $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, di determinante 2, quindi la conica non è degenere.

Uguagliamo a zero la forma quadratica xy ed otteniamo i due punti *impropri* $[0,1,0]$ e $[1,0,0]$. Pertanto, abbiamo un'iperbole. Le loro polari sono le rette $x = 0$ ed $y = 0$ e quindi il suo centro ha coordinate $(0,0)$. I suoi asintoti sono le rette che congiungono il centro con i punti impropri, ossia proprio $x = 0$ ed $y = 0$.



Ma ora procediamo come nella scuola superiore.

a) Si chiama **parabola** il luogo geometrico di tutti i punti del piano equidistanti da un punto fisso F, detto *fuoco*, e da una retta d, chiamata *direttrice*, non passante per il fuoco.

Scegliamo come asse y la perpendicolare da F a d, come asse x l'asse del segmento FH, dove $H = d \cap y$. Posto $F = (0, p)$, $p \neq 0$, la direttrice d ha equazione $y = -p$. Un punto P del luogo soddisfa la condizione $\overline{PF} = \overline{PE}$, dove E è il piede della perpendicolare da P a d. Posto $P = (x, y)$, si ha $E = (x, -p)$, quindi abbiamo l'equazione:

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(y+p)^2} \Leftrightarrow x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \cdot p \cdot y$$

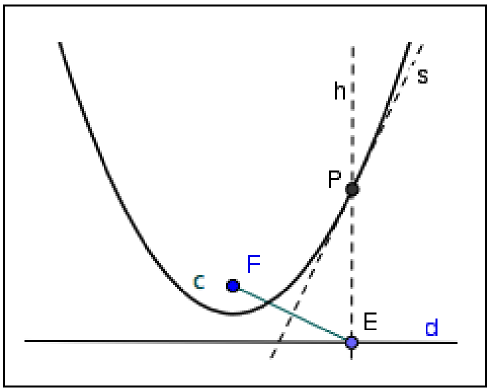
Posto ora $a = \frac{1}{4p}$, si ha l'equazione $a \cdot x^2 - y = 0$, con $a \neq 0$.

Inversamente, ogni equazione $a \cdot x^2 - y = 0$ con $a \neq 0$ è il luogo dei punti P equidistanti dal punto $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e dalla retta di equazione $y = -\frac{1}{4a}$, quindi è una parabola.

Osserviamo che in questo caso la matrice A ha determinante non nullo, mentre la matrice A_{33} ha determinante nullo e quindi un autovalore nullo. Con un poco di pazienza si dimostra che queste proprietà caratterizzano in ogni caso una parabola.

Poniamo ora $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, con a 0: è il grafico di un polinomio di secondo grado ed è l'equazione di una conica, che si potrebbe classificare con lo studio delle matrici A ed A_{33} e si troverebbe che è una parabola. Oppure, si può riscrivere così: $a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = y - \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$, ed allora una semplice traslazione la trasforma nell'equazione $a \cdot x^2 - y = 0$.

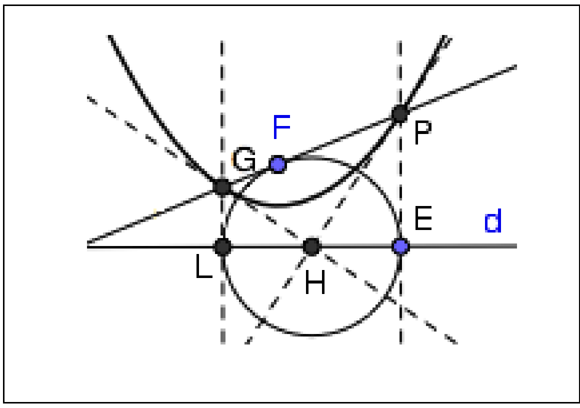
La parabola presenta un *asse di simmetria*. Infatti, ogni parabola è *simile* alla $a \cdot x^2 - y = 0$, che è il grafico della funzione *pari* $f(x) = a \cdot x^2$ e che dunque ha l'asse y come asse di simmetria. Il *vertice* V è il punto in cui l'asse di simmetria interseca la parabola. L'altra intersezione è il *punto improprio* della parabola [0,1,0].

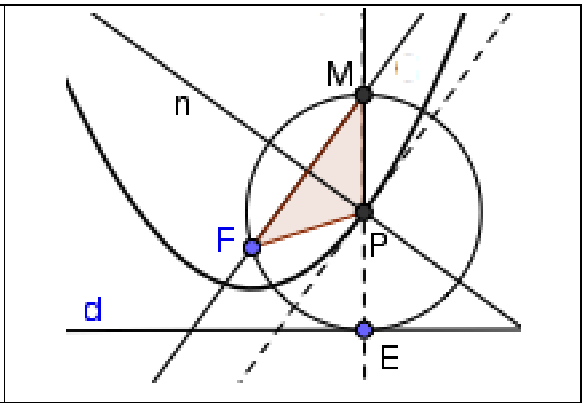


C'è un procedimento semplice per costruire una parabola mediante i diffusi software di geometria dinamica: si fissino un punto F come fuoco ed una retta d come direttrice. Su questa si prenda un punto E, si innalzi la perpendicolare h da E a d e la si intersechi con l'asse s del segmento EF: al variare di E sulla direttrice, il punto $P = h \cap s$, equidistante da F e da d, descrive la parabola.

Si osservi che la retta s è tangente in P alla parabola (esercizio).

Si osservi che la direttrice è la polare del fuoco. Posto infatti, in coordinate omogenee, $F = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4a} & 1 \end{bmatrix}$, scritta l'equazione della parabola nella forma $2a \cdot x^2 - 2 \cdot y = 0$ (il fattore 2 è per comodità), la polare di F è $F \times A \times X = 0$, dove $A = \begin{bmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Svolgendo i calcoli si ottiene $-y - \frac{1}{4 \cdot a} = 0$, da cui segue appunto $y = -\frac{1}{4a}$. Come corollario segue allora che se da un punto H della direttrice conduciamo le tangenti alla parabola, la retta PG che congiunge i due punti di tangenza P e G passa per il fuoco. Inoltre, detti E ed L i piedi delle perpendicolari a d condotte da P e G, si ha $\overline{HL} = \overline{HE} = \overline{HF}$ (esercizio).

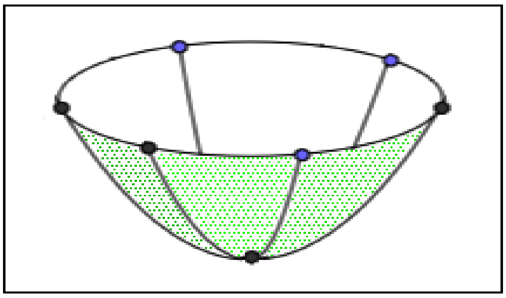




Proposizione 3.9. I raggi di luce emessi da una sorgente luminosa posta sul fuoco di una parabola, rimbalzando sulla parabola stessa diventano paralleli all'asse. Inversamente, raggi paralleli all'asse sono riflessi nel fuoco.

Dimostrazione. Sia data la parabola $a \cdot x^2 - y = 0$, a > 0, e sia F il suo fuoco. Il punto generico P abbia coordinate $\left(t, a \cdot t^2\right)$. Dobbiamo dimostrare che la retta FP e la retta x = t, parallela all'asse di simmetria, sono simmetriche rispetto alla perpendicolare n in P alla tangente in P. Per farlo, sia E il punto della direttice di ascissa t. Allora $\overline{FP} = \overline{PE} = a \cdot t^2 + \frac{1}{4a}$. Sulla retta $x = t$ consideriamo il punto M simmetrico di E rispetto a P: allora $\overline{PM} = \overline{PE} = a \cdot t^2 + \frac{1}{4a}$, quindi $M = \left(t,\ 2a \cdot t^2 + \frac{1}{4a}\right)$ ed inoltre $\overline{PM} = \overline{PF}$. Ne segue che il triangolo FPM è isoscele e la sua altezza relativa al lato FM è bisettrice dell'angolo $F\hat{P}M$. Se dimostriamo che la retta FM è parallela alla tangente in P, siamo a posto. Poiché $F = \left(0,\ \frac{1}{4a}\right)$, la retta FM ha coefficiente angolare $\frac{2a \cdot t^2 + \frac{1}{4a} - \frac{1}{4a}}{t-0} = 2at$, come la tangente in P.

Questa proprietà è all'origine delle applicazioni tecnologiche della parabola. Si consideri infatti il solido ottenuto ruotando la parabola $a \cdot x^2 - y = 0$ intorno al suo asse di simmetria. Si ottiene la superficie di equazione $a \cdot \left(x^2 + z^2\right) - y = 0$, detta *paraboloide (ellittico) di rotazione*. Tutti i piani passanti per l'asse intersecano il paraboloide in parabole con lo stesso fuoco, detto *fuoco* del paraboloide. Uno specchio o un'antenna parabolica sono ottenute tagliando un paraboloide di rotazione con un piano perpendicolare all'asse. Una sorgente puntiforme posta nel fuoco fornisce raggi che, riflessi dalle pareti interne, escono



paralleli all'asse del paraboloide. Inversamente, raggi luminosi o onde radio provenienti da una sorgente posta nella direzione dell'asse e sufficientemente lontana da poter essere considerati paralleli, sono riflessi e catturati da un ricevitore posto nel fuoco.

Ricordiamo infine, come ci insegna la Meccanica, che la traiettoria di un proiettile, in assenza di attriti, è un arco di parabola.

Vediamo ora il caso delle **coniche a centro.**

Con una trasformazione ortogonale ed una traslazione, l'equazione diventa: $\lambda_1 \cdot x^2 + \lambda_2 \cdot y^2 + \frac{\det(A)}{A_{33}} = 0$. Ossia, con una isometria, a partire dall'equazione generale di una conica a centro, prendendo come nuova origine il centro e come assi le rette corrispondenti agli autovettori della sottomatrice dei coefficienti dei termini di secondo grado (il cui determinante è $A_{33} \neq 0$), si ottiene l'equazione sopra scritta. Se i due autovalori λ_1 e λ_2 hanno lo stesso segno, allora il loro prodotto A_{33} è positivo e l'essere la conica una ellisse reale o immaginaria dipende dalla concordanza del loro segno col segno di det(A). Nel caso dell'ellisse reale, i segni sono discordi, quindi i numeri $\frac{\det(A)}{A_{33}\cdot\lambda_i}$, $i=1,2$, sono negativi. Poniamo: $a=\sqrt{\frac{-\det(A)}{A_{33}\cdot\lambda_1}}$, $b=\sqrt{\frac{-\det(A)}{A_{33}\cdot\lambda_2}}$.

Allora l'equazione dell'ellisse reale diventa: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, e questa è detta equazione canonica dell'ellisse.

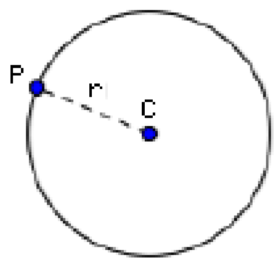
Per l'ellisse immaginario abbiamo concordanza di segno tra autovalori e det(A). Posto $a=\sqrt{\frac{\det(A)}{A_{33}\cdot\lambda_1}}$, $b=\sqrt{\frac{\det(A)}{A_{33}\cdot\lambda_2}}$, l'equazione canonica è $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$.

Infine, per l'iperbole, i segni degli autovalori sono opposti, il loro prodotto A_{33} è negativo. Allora, posto $a=\sqrt{\left|\frac{\det(A)}{A_{33}\cdot\lambda_1}\right|}$, $b=\sqrt{\left|\frac{\det(A)}{A_{33}\cdot\lambda_2}\right|}$, a meno di scambi di nome tra gli assi (con la simmetria assiale rispetto alla retta y = x), si ottiene l'equazione canonica delle iperboli $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

I numeri positivi a e b prendono il nome di *semiassi*. Dal fatto che x ed y siano solo al quadrato, segue che gli assi cartesiani sono assi di simmetria per queste coniche, ossia, **ogni conica a centro ha due assi di simmetria ortogonali fra loro**. Le intersezioni con tali assi si chiamano *vertici*.

L'ellisse immaginaria non ha punti nel piano cartesiano reale e la tralasciamo nel seguito. Vedremo quindi i casi dell'ellisse e dell'iperbole.

Incominciamo dall'ellisse, o meglio, da un suo caso particolare.

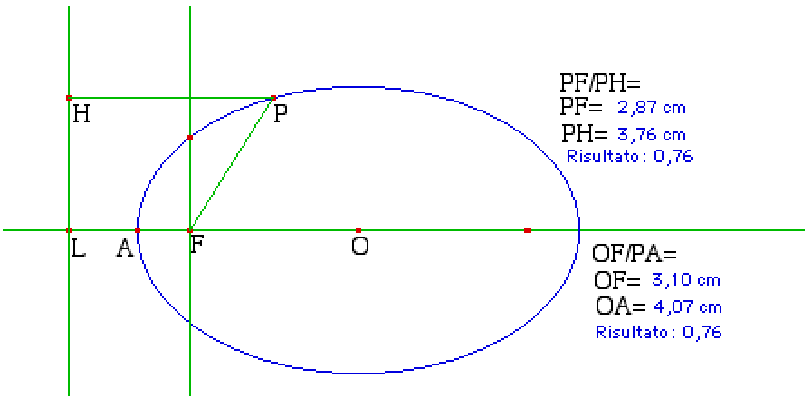


Se $a=b=r$ l'equazione diventa $x^2+y^2=r^2$ ed è una *circonferenza* di centro $O=(0,0)$ e *raggio* r. Essa è il luogo dei punti che hanno dal centro distanza uguale al raggio. Più in generale, posto $C=(x_0,y_0)$, preso un numero r > 0, l'equazione della circonferenza di centro C e raggio r è $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$. Svolgendo i calcoli, posto $\begin{cases}\alpha=-2\cdot x_0\\ \beta=-2\cdot y_0\\ \gamma=x_0^2+y_0^2-r^2\end{cases}$, le circonferenze hanno equazione $x^2+y^2+\alpha\cdot x+\beta\cdot y+\gamma=0$, ma non ogni equazione di questo tipo è una circonferenza. Infatti, una conica con questo tipo di equazione potrebbe non avere punti reali o essere degenere. Avremo una circonferenza se e solo se $\gamma - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\beta^2}{4} > 0$, perché il raggio è la radice quadrata di questo numero.

Le innumerevoli proprietà della circonferenza sono ben note e non sono qui riportate. Notiamo solo che ogni diametro è asse di simmetria e che i suoi punti impropri, immaginari, sono detti *punti ciclici* del piano, $(0, 1, \pm i)$ e per essi passano tutte le circonferenze.

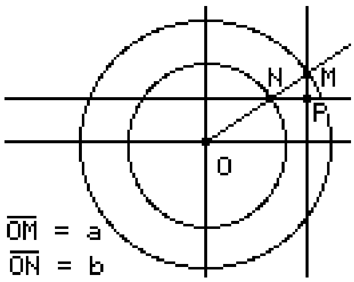
Inoltre, ogni punto della circonferenza $x^2 + y^2 = a^2$ si può rappresentare nella forma *polare* $\begin{cases} x = a \cdot \cos(\theta) \\ y = a \cdot \mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$, $0 \le \theta < 2\pi$.

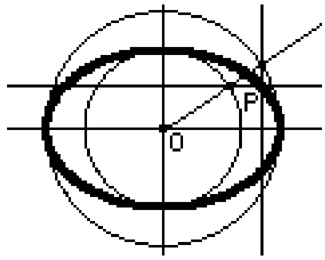
Torniamo ora all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Con semplici considerazioni si rileva che è contenuta nel rettangolo delimitato dalle rette di equazioni $x = \pm a$, $y = \pm b$. I punti di coordinate (±a, 0) e (0, ±b) appartengono all'ellisse e rappresentano i suoi vertici. Se a > b, la forma dell'ellisse è la seguente:



Posto $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ i punti di coordinate (±c; 0) sono detti *fuochi* dell'ellisse e il numero $\varepsilon = c/a$ è la sua *eccentricità*. Si ha sempre $0 \le \varepsilon < 1$. Se l'ellisse è una circonferenza, i fuochi coincidono tra loro e con il centro, e si ha $\varepsilon = 0$.
Se $\varepsilon \neq 0$ le due rette di equazioni $x = \pm a/\varepsilon$ sono dette *direttrici* dell'ellisse, e sono le polari dei fuochi. Una proprietà su cui torneremo è che per ogni punto dell'ellisse il rapporto delle distanze dal fuoco e dalla direttrice è costante ed uguale all'eccentricità.

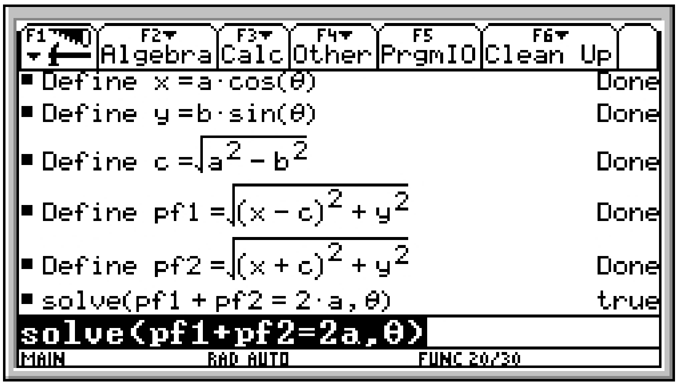
Ogni punto dell'ellisse si rappresenta in forma polare nel modo seguente: $\begin{cases} x = a \cdot \cos(\theta) \\ y = b \cdot \mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$, $0 \le \theta < 2\pi$. Ciò suggerisce la seguente costruzione: si considerino le due circonferenze di centro l'origine e raggi a e b. Sia M un punto della circonferenza maggiore. Il raggio OM incontra la circonferenza interna in un punto N. Si conducano da M la perpendicolare all'asse x, da N la perpendicolare all'asse y; il punto P di intersezione, al variare del punto M, descrive l'ellisse.





La definizione scolastica dell'ellisse è però la seguente, che qui diventa un teorema:

TEOREMA 3.10. L'ellisse è il luogo dei punti P del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti distinti fissati.



Dimostrazione. I punti P dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ sono tutti e solo i punti del piano tali che, detti F_1 e F_2 i fuochi, si ha $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$. Infatti, basta esprimere le coordinate di P in forma polare, ricordare che $c=\sqrt{a^2-b^2}$, poi calcolare le distanze di P dai due fuochi, risolvere l'equazione $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$ rispetto a θ, e si può fare anche con un software matematico: la risposta è "true", ossia è un'identità.

Inversamente, siano dati due punti, che chiameremo F_1 e F_2, un numero positivo, che denoteremo con 2a. Cerchiamo i punti P tali che $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$. **Fissiamo come asse y l'asse del segmento F_1F_2, mentre come asse x scegliamo la retta F_1F_2.** Posto $F_1=(c,0)$, $c>0$, allora $F_2=(-c,0)$ e deve essere $c<a$, per le proprietà dei lati del triangolo PF_1F_2 (ogni lato è minore della somma degli altri due). Pertanto, quando servirà, potremo porre $b=\sqrt{a^2-c^2}$ e ricavarne $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Sia $P=(x,y)$. Calcoliamo le distanze e esplicitiamo $\overline{PF_1}$: i passaggi sono ben noti e si possono eseguire anche con del software. L'unica cautela si deve avere nell'elevare al quadrato.

$\blacksquare\ \text{Define } pf1 = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \qquad \text{Done}$

$\blacksquare\ \text{Define } pf2 = \sqrt{(x+c)^2+y^2} \qquad \text{Done}$

$\blacksquare\ pf1 = 2\cdot a - pf2$

$\sqrt{x^2-2\cdot c\cdot x+y^2+c^2} = 2\cdot a - \sqrt{x^2+2\cdot c\cdot x+y^2+c^2}$

Eleviamo al quadrato:

$\blacksquare\ x^2-2\cdot c\cdot x+y^2+c^2 =$

$= -4\cdot a\cdot\sqrt{x^2+2\cdot c\cdot x+y^2+c^2}+x^2+2\cdot c\cdot x+y^2+4\cdot a^2+c^2$

Isoliamo il radicale:

$\blacksquare\ c\cdot x+a^2 = a\cdot\sqrt{x^2+2\cdot c\cdot x+y^2+c^2}$

Eleviamo al quadrato e semplifichiamo:

$\blacksquare\ c^2\cdot x^2+2\cdot a^2\cdot c\cdot x+a^4 = a^2\cdot x^2+2\cdot a^2\cdot c\cdot x+a^2\cdot y^2+a^2\cdot c^2$

$\blacksquare\ a^4-a^2\cdot c^2 = \left(a^2-c^2\right)\cdot x^2+a^2\cdot y^2$

Sostituiamo:

$\blacksquare\ \text{Define } c = \sqrt{a^2-b^2} \qquad \text{Done}$

$\blacksquare\ a^4-a^2\cdot c^2 = \left(a^2-c^2\right)\cdot x^2+a^2\cdot y^2$

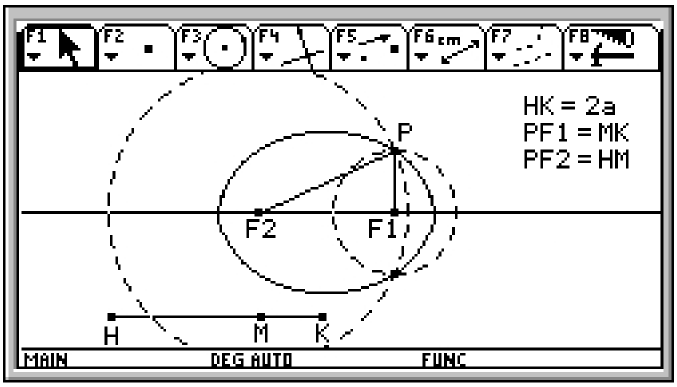
$a^2\cdot b^2 = b^2\cdot x^2+a^2\cdot y^2$

Dividiamo per il termine noto:

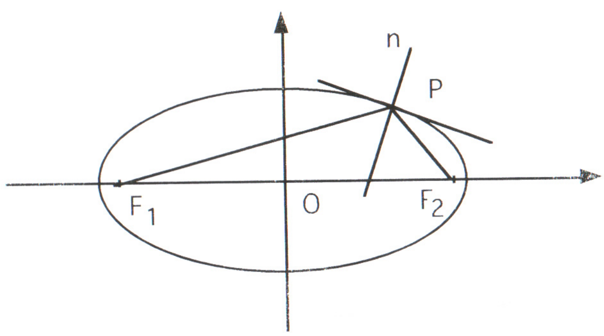
$\blacksquare\ \dfrac{a^2\cdot b^2 = b^2\cdot x^2+a^2\cdot y^2}{a^2\cdot b^2} \qquad 1 = \dfrac{b^2\cdot x^2+a^2\cdot y^2}{a^2\cdot b^2}$

$\blacksquare\ \text{expand}\left(1 = \dfrac{b^2\cdot x^2+a^2\cdot y^2}{a^2\cdot b^2}\right) \qquad 1 = \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$

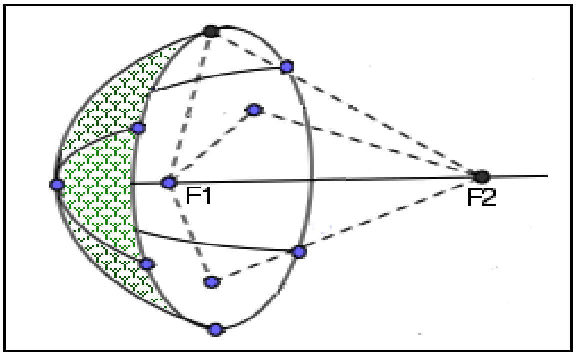
I passaggi alla fine sono tutti leciti, in quanto abbiamo già verificato che ogni punto dell'ellisse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ soddisfa la condizione $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$.



La costruzione dell'ellisse che fa uso di questa proprietà è detta "del giardiniere": si conficcano due pioli nel terreno a distanza 2c, ad essi si legano i capi di una corda di lunghezza 2a > 2c e con un bastone appuntito fatto scorrere sulla corda tenuta tesa è tracciata un'aiola a forma di ellisse. Non è agevole realizzarla con i software di geometria dinamica, perché il luogo non si chiude in corrispondenza dei vertici sulla retta dei fuochi.



Un'importante proprietà fisica dell'ellisse è la seguente: sia P un suo punto, sia r la retta tangente all'ellisse in P e sia n la perpendicolare in P a tale tangente. Allora n è la bisettrice dell'angolo formato dalle semirette PF_1 e PF_2. Pertanto un segnale che parta da F_1 e diretto verso P, dopo aver rimbalzato sull'ellisse passa per F_2. Non si riporta la dimostrazione di questo fatto. Si noti che, come conseguenza, ogni segnale emesso da una sorgente posta in un fuoco viene riflesso verso l'altro fuoco.



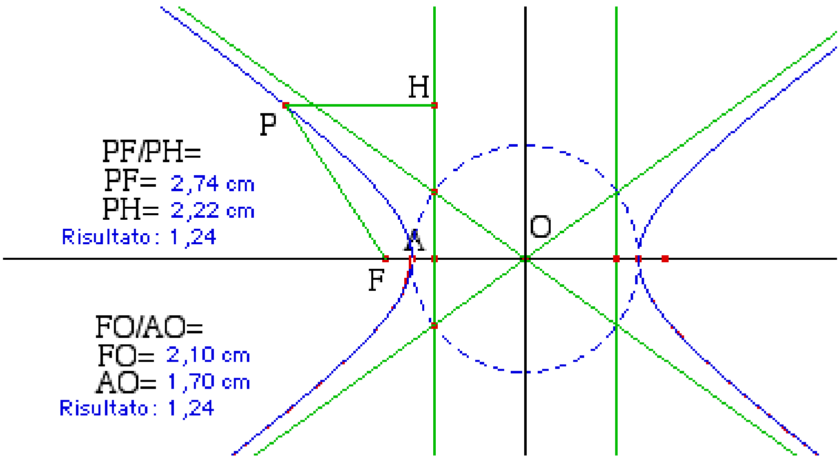
Ciò si mantiene anche in un *ellissoide di rotazione*, in cui tutte le ellissi ottenute sezionandolo con un piano passante per l'asse di rotazione hanno gli stessi fuochi: i raggi emessi da una sorgente posta in un fuoco di uno specchio di questo tipo si concentrano nell'altro fuoco. Possibili applicazioni si possono avere nella radioterapia.

Una situazione ben nota in cui compaiono delle ellissi si trova in astronomia: l'orbita di ogni pianeta è una ellisse di bassa eccentricità ed il sole occupa uno dei fuochi. Questo è il contenuto della prima legge di Keplero, trovata mediante lunghe osservazioni, ma ricavabile come conseguenza della legge di gravitazione universale di Newton.

In architettura, volte o piante a sezioni ellittiche si trovano talora in edifici antichi. In particolare, dove s'incontrano due volte semicilindriche ortogonali, si hanno costoloni ellittici. Un esempio è l'incrocio dei due voltoni sotto il palazzo Re Enzo a Bologna, dove, bisbigliando in un angolo, la voce si sente distintamente nell'angolo opposto. In pittura è poi nota l'ellisse barocca, formata dalle teste dei personaggi ed usata per dare dinamismo alle scene.

Dall'Analisi Matematica sappiamo che l'area della parte di piano costituita dai punti interni all'ellisse di semiassi a e b è data da $\pi \cdot a \cdot b$. Il calcolo coinvolge integrazioni per sostituzione e per parti, ed è un ottimo esercizio sugli integrali.

Considerazioni simili si possono fare per l'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Come nel caso dell'ellisse, si vede che è simmetrica rispetto all'origine e rispetto ai due assi coordinati. L'asse di simmetria y = 0 incontra la curva nei punti (±a, 0), che si chiamano *vertici* dell'iperbole. Invece l'altro asse, di equazione x = 0, non incontra l'iperbole.



Nessun punto P(x, y) per cui si abbia $|x| < a$ appartiene all'iperbole, che è dunque contenuta nei due semipiani definiti dalle condizioni $x \le -a$ e $x \ge a$. Pertanto la curva si spezza in due rami simmetrici rispetto agli assi e esterni alla striscia compresa fra le rette $x = \pm a$. Per la y non ci sono limitazioni.

Intersecando ora l'iperbole con le rette per l'origine $y = m\cdot x$, con $m\in\mathbf{R}$, si ottiene l'equazione $(b^2-m^2a^2)x^2 = a^2b^2$; poiché il secondo membro è positivo, essa ha soluzione se e solo se $b^2-m^2a^2 > 0$; ciò si verifica se $-\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a}$.

Le due rette limite $y = \pm bx/a$ sono gli *asintoti* dell'iperbole.

L'iperbole è contenuta nei due angoli opposti al vertice aventi gli asintoti per lati e per bisettrice l'asse x. L'iperbole non interseca mai gli asintoti, ma si avvicina ad essi a piacere man mano che cresce $|x|$.

Posto $c = \sqrt{a^2+b^2}$ i punti di coordinate $(\pm c;\ 0)$ sono detti *fuochi* dell'iperbole; il numero $\varepsilon = \frac{c}{a}$ è la sua *eccentricità* ed è sempre > 1.

Se a = b l'iperbole si dice *equilatera*. In tal caso, gli asintoti sono le bisettrici dei quattro quadranti ($y = \pm x$), sono perpendicolari fra loro e si ha $\varepsilon = \sqrt{2}$.

Le rette di equazioni $x = \pm a/\varepsilon$ sono dette *direttrici* dell'iperbole, sono le polari dei fuochi e sono contenute all'interno della striscia delimitata dalle rette $x= \pm a$.

Siano ora F un fuoco, A il vertice più vicino, O il centro dell'iperbole. La polare di F è la direttrice più vicina, e si costruisce come nel caso generale. La circonferenza di centro O e raggio OA interseca le direttrici in punti appartenenti agli asintoti. Il rapporto delle distanze $\overline{PF}/\overline{PH}$ di un punto qualunque P dell'iperbole da F e dalla sua direttrice uguaglia il rapporto $\overline{OF}/\overline{OA} = c/a = \varepsilon$.

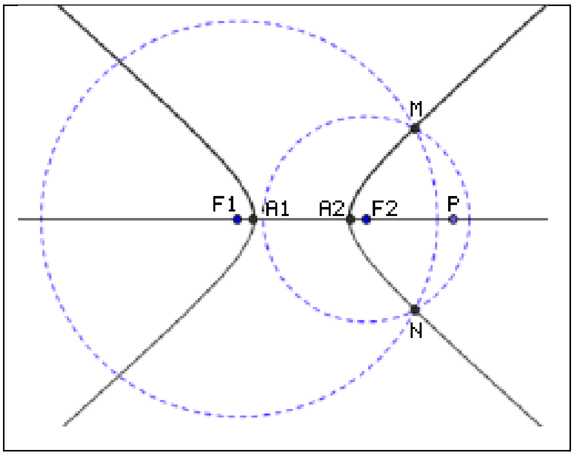
Come per l'ellisse, la definizione scolastica dell'iperbole è come luogo di punti, e qui è data come teorema.

TEOREMA 3.11. L'iperbole è il luogo dei punti del piano tali che il modulo della differenza delle distanze da due punti fissi distinti rimane costante.

Dimostrazione. Siano $F_1 = (c, 0)$ ed $F_2 = (-c, 0)$, $c > 0$, i due *fuochi* e $P = (x, y)$ il punto generico del piano, verificante la condizione: $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$, con $a > 0$. Considerato il triangolo PF_1F_2, poiché $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| < \overline{F_1F_2}$, si ha: $2a < 2c$, cioè $a < c$. La condizione iniziale si esprime analiticamente con l'equazione $\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a$, da cui quadrando e semplificando, dopo aver posto la condizione di esistenza dell'equazione: $\sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a \geq 0$, si ottiene: $a^2 - cx = \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Se si eleva di nuovo al quadrato, si ottiene $\left(c^2-a^2\right)\cdot x^2 - a^2y^2 = a^2\cdot\left(c^2-a^2\right)$. Essendo $a < c$, cioè $c^2 - a^2 > 0$, si può porre $c^2 - a^2 = b^2$ e l'equazione del luogo geometrico diviene $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$;

dividendo per a si ottiene $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, che è l'equazione canonica dell'iperbole avente i fuochi sull'asse delle ascisse. Inversamente, ogni punto P dell'iperbole soddisfa la condizione $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2a$, perché soddisfa tutte le condizioni poste.

Per costruire un'iperbole, siano dati l'asse traverso A_1A_2 ed i fuochi F_1 ed F_2. Preso un punto qualunque P sulla retta r passante per i fuochi, esterno alla distanza focale, si traccino la circonferenza di centro in F_2 e raggio PA_2 e quella di centro F_1 e raggio PA_1.



I punti M, N d'intersezione sono punti dell'iperbole. Infatti, per il punto M si ha:

$$\overline{MF_1}-\overline{MF_2}=\overline{PA_1}-\overline{PA_2}=\overline{A_1A_2}.$$

Lo stesso per il punto N. Per l'altro ramo si procede per simmetria. Come per l'ellisse, questa costruzione eseguita con i software di geometria dinamica talora non si chiude nei vertici ed occorrono manipolazioni per ottenere belle figure.

Ruotiamo ora un'iperbole intorno ad uno dei suoi assi: se l'asse è quello dei fuochi, si ottiene *l'iperboloide di rotazione ellittico*, a due *falde*, mentre se la ruotiamo intorno all'altro asse otteniamo un *iperboloide di rotazione iperbolico*, ad una *falda*, tale che per ogni suo punto passano due rette interamente giacenti sull'iperboloide.

Nota. Se ruotiamo un'ellisse intorno ad uno qualunque dei suoi due assi di simmetria otteniamo un *ellissoide di rotazione*. Se ruotiamo una parabola intorno al suo asse di simmetria otteniamo un *paraboloide di rotazione*, ed è un caso particolare di una quadrica *detta paraboloide ellittico*. Esiste però un'ulteriore tipo di quadrica non degenere, che non è mai di rotazione: è il *paraboloide iperbolico*, a forma di sella. Su svariati siti Internet è possibile vedere la forma delle quadriche affini non degeneri.

Abbiamo visto strada facendo che ellissi, iperboli e parabole possiedono fuochi e direttrici con la proprietà che per ogni loro punto il rapporto delle distanze da un fuoco e dalla sua direttrice è costante. Vogliamo approfondire la questione.

TEOREMA 3.12. Siano $\varepsilon > 0$, F un punto e d una retta non passante per F. Il luogo dei punti P tali che $\overline{PF}=\varepsilon\cdot\overline{PH}$ (dove $\overline{PH}$ è la distanza di P dalla retta d) è una conica non degenere. Più precisamente, si ha:

- Se $0 < \varepsilon < 1$ la curva è un'ellisse.

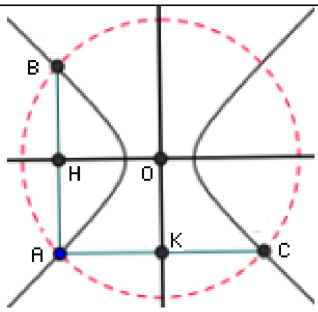
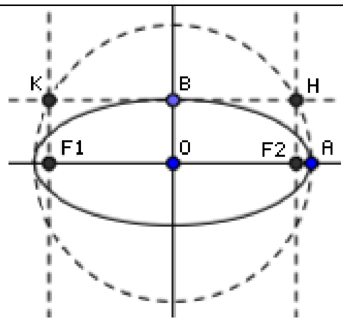
- Se $\varepsilon = 1$ la curva è una parabola.
- Se $\varepsilon > 1$ la curva è un'iperbole.

Dimostrazione. Possiamo porre F = (h, 0), h > 0, e scegliere come d l'asse y. Allora $\overline{PF} = \sqrt{(x-h)^2 + y^2}$, mentre la distanza di P da d è $|x|$. Allora P soddisfa l'equazione $\sqrt{(x-h)^2 + y^2} = \varepsilon \cdot |x|$. Eleviamo al quadrato e portiamo tutto al primo membro: $(1-\varepsilon^2)\cdot x^2 + y^2 - 2\cdot h \cdot x + h^2 = 0$. Si ottiene una conica non degenere, che a seconda del valore di ε, è un'ellisse, un'iperbole o una parabola. Si noti che, rispetto alla conica ottenuta, la direttrice è la polare del fuoco.

NOTE. a) Per $\varepsilon = 0$ si ha l'equazione di una circonferenza, ma questa costruzione non è in grado di definire le circonferenze, perché $\overline{PF} = \varepsilon \cdot \overline{PH} = 0$ implicherebbe $P = F$ ed in questo caso la conica si trasformerebbe in un punto. Il fatto è che in una circonferenza i fuochi coincidono col centro, e la polare del centro è la retta impropria. Quindi, il caso della circonferenza va trattato a parte, come caso limite dell'ellisse.

b) La costruzione di una conica per 5 punti scelti a caso non dà mai né una parabola né una circonferenza, dato che la circonferenza e la parabola hanno eccentricità rispettivamente 0 ed 1, mentre ellisse ed iperbole "generiche" hanno infinite possibilità. Allo stesso modo, non vengono coniche degeneri, perché tre punti a caso dovrebbero essere allineati. Per ottenere una parabola conviene costruirla come luogo, prendere su di essa cinque punti e poi generare la conica per essi. Oppure, fissare tre punti e la direzione dell'asse, costruire altri due punti e poi la conica per essi.

c) Ecco due costruzioni per trovare gli assi di simmetria di una conica, il cui centro si trova con il comando apposito del software Geogebra:

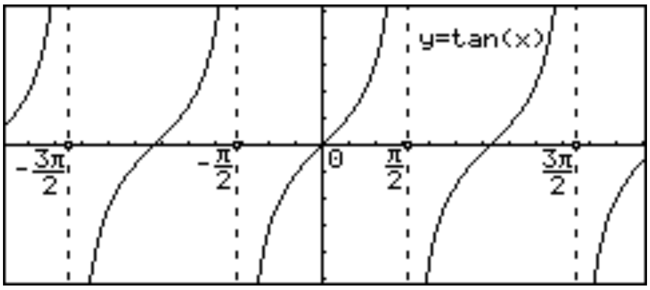
	
Assi e vertici di una conica a centro. Siano O il centro ed A un punto della conica. Si tracci la circonferenza di centro O e raggio OA. Le intersezioni con la conica sono vertici di un rettangolo i cui assi dei lati sono gli assi della conica. I vertici sono le intersezioni degli assi con la conica.	**Fuochi di un'ellisse, dati gli assi.** Siano OA e OB i due semiassi. La circonferenza di centro O e raggio OA intersechi in H e K la parallela per B all'asse OA. Le parallele per H e K all'asse OB intersecano OA nei fuochi F1 ed F2.

Cap. 4 - ESERCIZI

Alcuni esercizi sono svolti a completamento degli appunti; altri sono proposti ma non svolti.

4.1. - Quali isometrie contiene lo stabilizzatore del grafico della funzione $y = \tan(x)$?

Soluzione: la tangente è definita per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ ed è periodica di periodo π. Inoltre, è dispari e crescente su ciascun intervallo $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[,\ k \in \mathbf{Z}$.



Pertanto, possiede un punto di flesso $k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$,in ciascuno di questi intervalli.
Abbiamo allora che ogni punto di flesso è un *centro di simmetria*. Anche ogni punto $\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$, è centro di simmetria.
La periodicità ci dà un gruppo ciclico di traslazioni parallele all'asse x e generato dalla traslazione di vettore $\vec{v} = (\pi, 0)$. Non ci sono simmetrie assiali, pertanto lo stabilizzatore del grafico è un sottogruppo del gruppo dei movimenti. Non è abeliano, perché due simmetrie centrali con centri diversi non commutano: danno due traslazioni con lo stesso modulo (doppio della distanza fra i centri) e stessa direzione, ma versi opposti.

NOTA. Questo gruppo ha la presentazione $G = \left\langle a, b \middle| a^2 = b^2 = 1 \right\rangle$, è numerabile, si denota con D_∞ e ogni gruppo diedrale D_n è un suo quoziente.

4.2. - Si trovino gli elementi e si scriva la tavola di moltiplicazione del gruppo presentato da

$$G = \left\langle a, b \middle| a^4 = b^2 = 1, ab = ba \right\rangle.$$

Soluzione: è $G = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$ quindi ha otto elementi ed è abeliano.
La sua tavola di moltiplicazione si ricava allora subito con le proprietà delle potenze.
Ricordo che ci sono altri due gruppi abeliani di ordine 8: il gruppo ciclico ed il 2-gruppo abeliano elementare, i cui elementi ≠ 1 hanno ordine 2.

·	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
1	1	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b
a	a	a^2	a^3	1	ab	a^2b	a^3b	b
a^2	a^2	a^3	1	a	a^2b	a^3b	b	ab
a^3	a^3	1	a	a^2	a^3b	b	ab	a^2b
b	b	ab	a^2b	a^3b	1	a	a^2	a^3
ab	ab	a^2b	a^3b	b	a	a^2	a^3	1
a^2b	a^2b	a^3b	b	ab	a^2	a^3	1	a
a^3b	a^3b	b	ab	a^2b	a^3	1	a	a^2

4.3. - Un orologio digitale segna le ore da 00:00 a 23:59. Quante volte in un giorno la somma delle sue cifre è 2?(*)

Soluzione: La somma delle cifre è 2 se ci sono un 2 e tre zeri, oppure due 1 e due zeri. La prima eventualità si presenta 4 volte: 00:02, 00:20, 02:00, 20:00. La seconda si presenta tante volte quanti sono gli anagrammi di 1100, ossia $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$ volte. In totale, quindi, 10 volte ogni giorno.

4.4. – Si dimostri che l'insieme dei polinomi in **R**[x,y] che si annullano per ogni punto $P = (x_0, y_0)$ di una fissata figura piana $\Im$ è un ideale di **R**[x,y].

Soluzione: Poiché le operazioni nell'anello dei polinomi di **R**[x,y] corrispondono alle operazioni "punto per punto" delle funzioni da $\mathbf{R}^2$ ad **R**, è immediato verificare che l'insieme I dei polinomi che si annullano per ogni punto P di $\Im$ contiene il polinomio nullo ed è chiuso per rispetto alla somma e gli opposti. Inoltre, il prodotto di un f∈I per un polinomio qualsiasi g è tale che $(f \cdot g)(P) = f(P) \cdot g(P) = 0 \cdot g(P) = 0$, quindi $f \cdot g \in I$ e pertanto I è un ideale di **R**[x,y].

4.5. – Il coniugio è una congruenza in un gruppo G?

Soluzione: in un gruppo le congruenze sono tali che la classe dell'elemento neutro è un sottogruppo normale K e le altre classi sono i suoi laterali Kx. Nel caso del coniugio, la classe di 1_G è $\{1_G\}$, che è normale in G, ma le altre classi sono i suoi laterali se e solo se hanno un solo elemento ciascuna, ossia se e solo se il gruppo è abeliano. Pertanto, il coniugio è una congruenza se e solo se G è abeliano, ed in tal caso è la congruenza banale.

4.6. – Si trovino i sottocampi del campo reale generati rispettivamente da $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Soluzione: ogni sottocampo di **R** contiene il campo razionale **Q**. Il primo numero è razionale, quindi il sottocampo generato è **Q**. Il secondo è un irrazionale quadratico, con coefficiente razionale $\frac{1}{2}$. Il campo è quindi ($\mathbf{Q}(\sqrt{3})$); il polinomio minimo di $\sqrt{3}$ è $x^2 - 3$, pertanto i suoi elementi sono della forma $a + b\sqrt{3}$, con a e b razionali. Il terzo numero è anch'esso un irrazionale quadratico, quindi il campo è $\mathbf{Q}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ e i suoi elementi sono della forma $a + b\sqrt{\frac{2}{3}}$.

(*) Per gentile concessione de "La Settimana Enigmistica".

NOTA. Osserviamo che pur essendo $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, i campi $\mathbf{Q}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ e $\mathbf{Q}\left(\sqrt{6}\right)$ non coincidono: i polinomi minimi sono rispettivamente $3x^2-2$ e x^2-6, che sono coprimi e generano ideali diversi, quindi anche i quozienti sono diversi. Tuttavia, come ci si può aspettare, sono isomorfi; l'isomorfismo $\varphi : \mathbf{Q}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \to \mathbf{Q}\left(\sqrt{6}\right)$ è dato da: $(a,b) \mapsto \left(a, \frac{b}{3}\right)$, come si può verificare per esercizio.

4.7. – Si verifichi che i sottocampi di **R** generati da $\sqrt{3}$ e $\sqrt{2}$ non sono isomorfi.

Soluzione. I sottocampi sono $\mathbf{Q}\left(\sqrt{3}\right)$ e $\mathbf{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ rispettivamente. Per assurdo esista un isomorfismo di campi, che porta ogni elemento della forma $a+b\sqrt{3}$ in uno della forma $x+y\sqrt{2}$. Esso porta in particolare $\sqrt{3}$ in un elemento della forma $x+y\sqrt{2}$. Allora, elevando al quadrato, esso porta il suo quadrato 3 in $\left(x+y\sqrt{2}\right)^2 = \left(x^2+2y^2\right)+\left(2xy\right)\sqrt{2}$. Ma ogni isomorfismo di campi porta 1 in 1, quindi ogni razionale in se stesso, dunque al 3 deve corrispondere se stesso. Ciò è possibile solo se xy = 0. Se x = 0 allora $3 = 2y^2$, impossibile in **Q**; analogamente, se y = 0 si ha $3 = x^2$, pure impossibile. Dunque, l'isomorfismo non esiste.

4.8. – Si trovino i sottocampi di **R** generati rispettivamente da $\sqrt{3+\sqrt[3]{5}}$ e da π.

Soluzione. Sia $c = \sqrt{3+\sqrt[3]{5}}$; allora $c^2 = 3+\sqrt[3]{5} \Rightarrow \left(c^2-3\right)^3 = 5 \Rightarrow x^6 - 9x^4 + 27x^2 - 32 = 0$ è un polinomio a coefficienti razionali avente c come radice, ma non ha radici razionali. Inoltre, in **R**[x] il polinomio si scompone come differenza di cubi, ma con coefficienti irrazionali, perché 5 non è un cubo in **Q**. Non solo, ma poiché le altre due radici cubiche di 5 sono complesse coniugate, abbiamo due radici reali, ±c, e le altre sono complesse coniugate. Ne segue che **Q**(c) ha dimensione 6 rispetto a **Q** e come base ha le potenze di c con esponente ≤ 5. Non è un ampliamento normale di Q, perché è costituito da numeri reali, mentre il polinomio minimo di c ha anche radici complesse.
Il numero π è trascendente rispetto a Q, quindi l'anello Q[π] è isomorfo a Q[x]. Allora, il sottocampo generato da π è il campo dei quozienti di quest'anello ed i suoi elementi sono numeri reali del tipo $\frac{f(\pi)}{g(\pi)}$, dove f e g sono polinomi a coefficienti razionali e g non è il polinomio nullo.

4.9. – Si trovi un controesempio che mostri che nell'anello $\mathbf{Z}_8[x]$ non vale i principio d'identità dei polinomi.

Soluzione. Si sa che il principio d'identità dei polinomi, che consente di identificare polinomi e funzioni polinomiali, vale nei dominii d'integrità infiniti. In questo caso siamo in un anello commutativo di ordine 8.

Allora basta considerare il polinomio $p(x)=\prod_{j=0}^{7}\left(x-[j]_8\right)$, che è identicamente nullo su $\mathbf{Z}_8$.

Non è il polinomio di grado più piccolo: anche $q(x)=[4]_8\, x\cdot\left(x-[1]_8\right)$, di secondo grado, è identicamente nullo come funzione polinomiale.

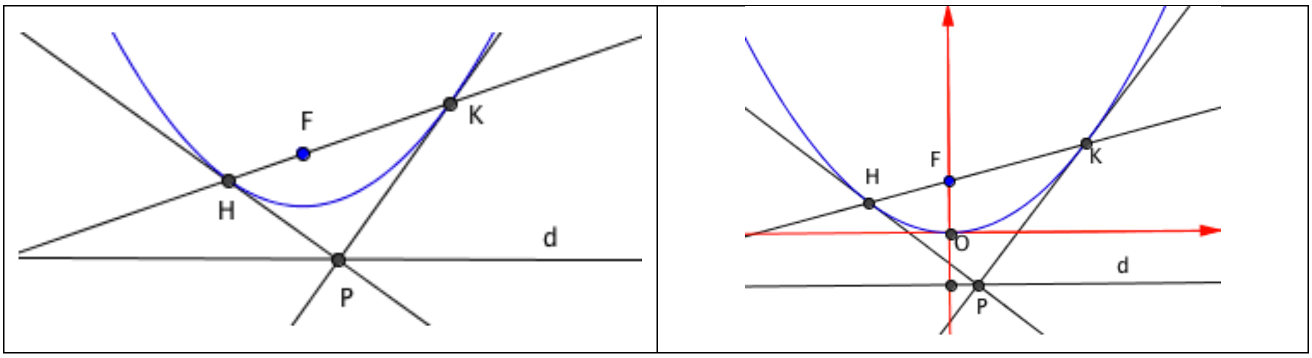
NOTA: I polinomi che danno luogo a funzioni polinomiali identicamente nulle costituiscono un ideale di $\mathbf{Z}_8[x]$, che non è principale, perché p, che è monico, non è multiplo di q.

4.10. – In uno dei seminari si è affermato che i numeri primi della forma 4k+3 non sono somme di due quadrati. E' vero, ma come mai?

Soluzione. Ogni intero diviso per 4 si scrive nella forma 4q+r, con 0 ≤ r ≤ 3. Se eleviamo al quadrato, troviamo $16q^2+8qr+r^2\equiv r^2(\mathrm{mod}\,4)$. Ora, Se $r=0$ o $r=2$ si ha $r^2\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$, mentre se $r=1$ o $r=3$ si ha $r^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$. Allora, la somma di due quadrati può essere solo congrua a 0, 1 oppure 2 modulo 4. Ne segue che i numeri della forma 4k+3 non sono somme di quadrati. In particolare, non lo sono i numeri primi 3, 7, 11, 19, 23 …

NOTA. Si può dimostrare che i primi della forma 4k+1 sono somme di due quadrati per ogni k intero, ma la dimostrazione coinvolge i numeri complessi della forma a+bi, con a, b interi (gli *interi di Gauss*).

4.11. – Si consideri una parabola di fuoco F e direttrice d. Sia P un punto appartenente a d, si conducano da P le tangenti alla parabola e, detti H e K i punti di tangenza, si dimostri che la retta HK passa per il fuoco.



Soluzione. Se collochiamo gli assi in modo opportuno, l'equazione della parabola è $y=a\cdot x^2$, la direttrice ha equazione $y=-\frac{1}{4a}$ e quindi $P=\left(t,-\frac{1}{4a}\right)$. Le rette per P tangenti alla parabola non sono parallele all'asse y, quindi hanno equazioni del tipo $y+\frac{1}{4a}=m\cdot(x-t)$. Intersechiamo con la parabola e annulliamo il discriminante dell'equazione di secondo grado così ottenuta.

Con un po' di passaggi si ottiene $\Delta = m^2 - 4a \cdot m \cdot t - 1 = 0$, da cui …. Un milione di calcoli!
Una semplificazione si ha ricordando che le parabole sono tutte simili, quindi possiamo supporre a = 1.

Allora i calcoli danno $\Delta = m^2 - 4 \cdot m \cdot t - 1 = 0$ e si ha $m = 2t \pm \sqrt{4t^2 + 1}$. Si devono poi sostituire questi valori nella equazione della retta per P, trovare per ciascuna il punto di tangenza, H e K rispettivamente, e poi l'equazione della retta HK e infine dimostrare che F le appartiene indipendentemente dal valore di t.
Però ci si può ricordare che d è la polare del fuoco F, quindi per ogni punto $P \in d$ la sua polare passa per F, e la polare di P è proprio la retta che congiunge i due punti di tangenza H e K.
Niente calcoli, due righe (ma tanta teoria delle coniche prima …).

4.12. – Si consideri il fascio di parabole $y = 2x^2 - (4-k)x + 3 - k$, $k \in \mathbf{R}$. Si trovi il luogo dei vertici al variare di k.

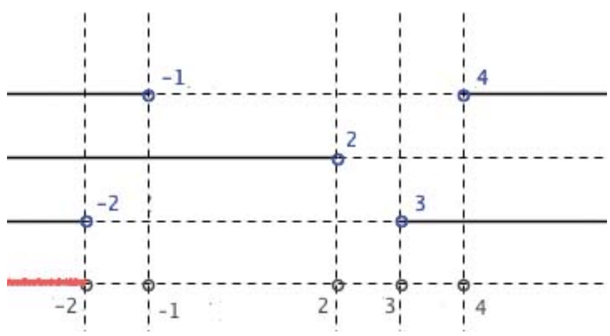
Soluzione. Il vertice V ha coordinate (x,y) con

$$\begin{cases} x = \dfrac{4-k}{4} \\ y = 2\left(\dfrac{4-k}{4}\right)^2 - \dfrac{(4-k)^2}{4} + 3 - k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4-k}{4} \\ y = -\dfrac{(4-k)^2}{8} + 3 - k \end{cases} \Rightarrow \ y = -2x^2 + 4x - 1 .$$

4.13 – Si trovi per quali x reali si ha $\ln\left(x^2 - 3x - 4\right) - \ln(2 - x) > 0$.

Soluzione. Le condizioni di esistenza e la disequazione, data la crescenza del logaritmo, sono:

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 > 0 \\ 2 - x > 0 \\ x^2 - 3x - 4 > 2 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 4 > 0 \\ 2 - x > 0 \\ x^2 - 2x - 6 > 0 \end{cases} .$$



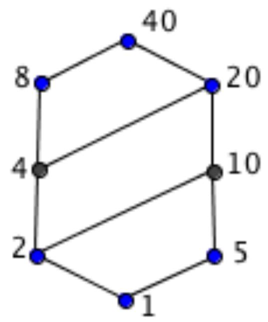
Ne riportiamo le soluzioni con linee piene su tre rette parallele, copie di **R** allineate. Si ottengono semirette prive della loro origine, perché le diseguaglianze sono strette. Poiché stiamo risolvendo un sistema, ci servono le soluzioni comuni alle tre disequazioni. L'unico intervallo di soluzioni comuni è $\left]-\infty, -2\right[$.

4.14. Si calcoli il periodo (o ordine) delle isometrie che trasformano in sé un esagono regolare.

4.15. Il prodotto diretto dei gruppi ciclici C_6 e C_8 è ciclico? È isomorfo al prodotto diretto $C_{24} \times C_2$? Motivare le risposte.

4.16. Si tracci il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato dei divisori di 40.

Soluzione: $40 = 2^3 \cdot 5$ ha per divisori 1, 2, 4, 8, 5, 10, 20, 40.



4.17. Si risolva l'equazione $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$ nel campo reale.

4.18. Si dimostri che un numero della forma $10k + 7$, con k intero, non può essere il quadrato di un intero. Può essere il cubo di un intero?

4.19. Si trovi il polinomio minimo del numero complesso π+i rispetto al campo reale.

4.20. Si calcoli l'eccentricità dell'ellisse di equazione $9x^2 + 12y^2 = 36$ (varianti: problema analogo con un'iperbole).

4.21. Si trovino le equazioni delle rette tangenti all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ condotte dal punto $P = (3,4)$ (varianti: problemi analoghi con iperboli o parabole).

4.22. Si trovi l'equazione dell'iperbole di vertici $(\pm 2,0)$ e passante per il punto $P = (3,4)$ (varianti: problemi analoghi per ellisse e parabola)

4.23. Si risolva l'equazione $x^4 - 7x^2 + 6 = 0$ nei campi razionale, reale e complesso.

4.24. Il numero $2^{21} - 1$ è primo? Se no, si indichi un suo divisore proprio.

Soluzione. Poiché $21 = 7 \cdot 3$, possiamo trattare questo numero come differenza di cubi:

$$2^{21} - 1 = \left(2^7\right)^3 - 1 = \left(2^7 - 1\right) \cdot \left(\left(2^7\right)^2 + 2^7 + 1\right),$$

quindi $2^{21} - 1$ è multiplo di $2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$. Si può trattare anche $2^{21} - 1$ come differenza di settime potenze, quindi è anche multiplo di $2^3 - 1 = 7$.

4.25. Si risolva la disequazione $\frac{2}{x-1} + \frac{5x}{x+1} < \frac{7x}{1-x}$.

4.26. Per quali x∈R si ha $\ln\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{9 - x^2}\right) > 0$? (varianti: per quali x esiste $\ln\left(f(x)\right)$ o $\sqrt{f(x)}$).

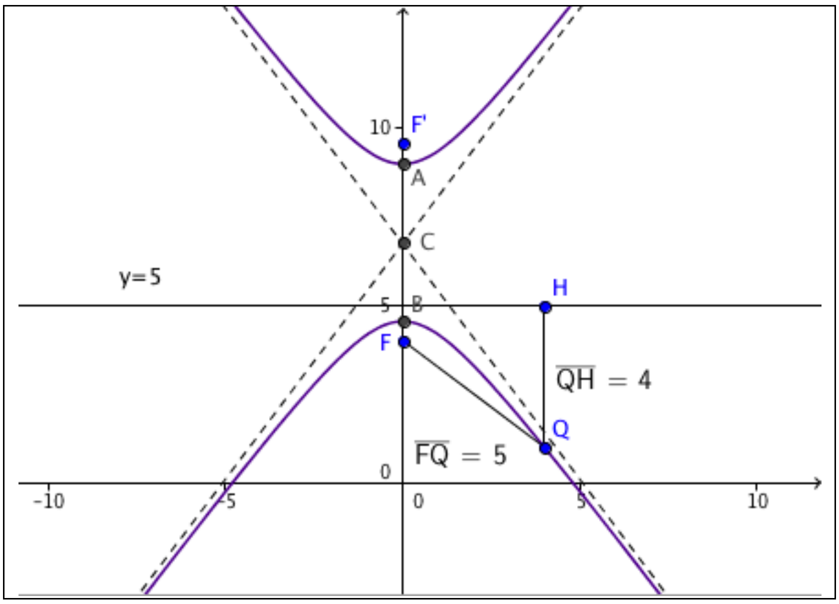
4.27. Dati la retta di equazione y = 5 ed il punto F = (0,4) si trovi l'equazione della conica avente fuoco F, direttrice y = 5 e passante per il punto Q = (4,1). Che conica è?

Soluzione. Sia H il piede della perpendicolare da Q alla direttrice. Il rapporto $\varepsilon = \dfrac{\overline{QF}}{\overline{QH}}$ è l'eccentricità. Nel nostro caso vale: $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{4^2 + (1-4)^2}}{|5-1|} = \dfrac{5}{4}$, quindi si tratta di un'iperbole.

Possiamo ricavarne l'equazione imponendo ad un punto $P = (x,y)$ del piano la condizione $\dfrac{\sqrt{x^2 + (y-4)^2}}{|5-y|} = \dfrac{5}{4}$. Sviluppiamo i calcoli: elevando al quadrato e riducendo allo stesso denominatore otteniamo l'equazione: $16x^2 - 9y^2 + 122y - 369 = 0$. Si tratta di un'iperbole traslata, con i vertici e i fuochi sull'asse y. Per trovare i vertici, sostituiamo x = 0 ed otteniamo l'equazione $-9y^2 + 122y - 369 = 0$, che ha per soluzioni 9 e 41/9. Allora i vertici sono $A = (0,9)$ e $B = (0,41/9)$, ed il centro è il loro punto medio $C = (0,61/9)$. Ne segue che il semiasse a dei vertici vale $a = \overline{BC} = \left|\dfrac{61}{9} - \dfrac{41}{9}\right| = \dfrac{20}{9}$. Possiamo ora ricavare l'equazione canonica o con una traslazione che porti l'origine in C: $\begin{cases} x = x' \\ y = y' + 61/9 \end{cases}$, da cui sostituendo:

$$16x'^2 - 9y'^2 = -\frac{400}{9} \Rightarrow \frac{y'^2}{\frac{400}{81}} - \frac{x'^2}{\frac{25}{9}} = 1$$

Oppure, si può ricavare c: $\varepsilon = \dfrac{5}{4} = \dfrac{c}{a} \Rightarrow c = \dfrac{5}{4} \cdot \dfrac{20}{9} = \dfrac{25}{9}$ (o semplicemente $c = \dfrac{61}{9} - 4 = \dfrac{25}{9}$) e quindi $b = \sqrt{\left(\dfrac{25}{9}\right)^2 - \left(\dfrac{20}{9}\right)^2} = \dfrac{5}{3}$. Allora, l'equazione canonica è: $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{y^2}{\frac{25}{9}} - \dfrac{x^2}{\frac{400}{81}} = 1$, come sopra.



NOTA. Gli asintoti nell'equazione canonica nel caso dei fuochi sull'asse y hanno equazione:

$$y = \pm\frac{a}{b}x.$$

Nel nostro caso si ha $y = \pm\dfrac{20/9}{5/3}x = \pm\dfrac{4}{3}x.$ Allora le parallele per il centro $C = (0,61/9)$ sono: $y = \pm\dfrac{4}{3}x + \dfrac{61}{9}$ e questi sono gli asintoti dell'iperbole originale. Infine, $F' = \left(0,\dfrac{86}{9}\right)$.

4.28. Si trovi il polinomio minimo del numero $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ rispetto a Q[x].

4.29. Date le due parabole $y=3x^2+1$ e $y=x^2-2x+1$, si trovino le coniche degeneri appartenenti al fascio di coniche da esse determinato.

4.30. – Si razionalizzi $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{7}}$.

4.31. Si trovi il decimale periodico corrispondente alla frazione $\dfrac{33}{14}$ (o il problema inverso)

4.32. Si trovi il MCD tra il polinomio $x^3+11x^2+7x-147$ e la sua derivata.

4.33. Si trovi il coefficiente di x^7y^4 nello sviluppo del binomio $(x-2y)^{11}$.

4.34. Esiste un numero naturale la cui cifra delle unità è 2 ed è un quadrato perfetto mod 5?

4.35. Si trovi l'inverso di $c=1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ nel campo $\mathbf{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$.

Soluzione. Il polinomio minimo di $\sqrt[3]{2}$ è x^3-2, quindi $\mathbf{Q}\left(\sqrt[3]{2}\right)$ ha dimensione 3 rispetto al campo razionale.

Sia $u=\sqrt[3]{2}$, allora $u^3=2$. Ne segue $c=1+u+u^2=\dfrac{u^3-1}{u-1}=\dfrac{1}{u-1}$, dunque $c^{-1}=u-1=\sqrt[3]{2}-1$.

4.36. Si trovi una retta che sia tangente alla parabola di equazione $y=x^2$ ed alla circonferenza $x^2+y^2-6x+2y+9=0$.

Soluzione. Il punto generico della parabola è $P=(t,t^2)$; la tangente in quel punto è $y=2t\cdot(x-t)+t^2$, ossia, in forma implicita, $2tx-y-t^2=0$. La circonferenza ha centro $C=(3,-1)$ e raggio 1. Allora imponiamo che la distanza di C dalla retta sia 1: $\dfrac{\left|6t+t-t^2\right|}{\sqrt{4t^2+1}}=1$. Svolgendo i calcoli, si trova l'equazione $t^4-14t^3+45t^2-1=0$ che ha quattro radici reali irrazionali, corrispondenti alle quattro tangenti comuni. Per approssimarle serve del software di calcolo numerico.